Problemas famosos de Geometría

Rafa Granero Belinchón

Índice general

0.1. Introducción 3

1. La Cuadratura de la Parábola **5**

2. El Problema de Apolonio **17**

3. La Fórmula de Herón del Área del Triángulo **23**

4. La Recta de Euler **31**

0.1. Introducción

Los problemas tratados en este trabajo han sido elegidos para ejemplificar como a lo largo de la Historia de las Matemáticas se han desarrollado diversas herramientas y estilos de demostración y resolución.

Comienzo con la cuadratura de una sección de parábola de Arquímedes, donde trabajo con la obra original *El Método*[12] y *Sobre la cuadratura de la parábola*[10], como ejemplo del método de exhaución.

Continúo con el problema de tangencia de Apolonio, donde doy una guía de la solución de Gergonne y una demostración algebraica mucho mas elemental.

Tras estos problemas viene la demostración de Herón de la fórmula del área del triángulo seguida de la demostración del mismo resultado de Euler, ambas son al estilo griego, sintético. Aquí se puede apreciar el estudio del mismo problema a lo largo de la historia de las matemáticas, así como el intento de dar una demostración más elegante o simple.

Y para concluir trato la demostración de Euler de la existencia de la recta de Euler, cuya demostración es algebraica, y añado una demostración posterior del mismo resultado de geometría sintética.

Capítulo 1

La Cuadratura de la Parábola

La cuadratura de una sección de parábola es uno de los logros mas remarcables de Arquímedes, que lo logró en torno al año 240a.C. y lo escribió en su libro *De la cuadratura de la parábola*.

Arquímedes (Siracusa,287 - 212 a.c.), hijo de un astrónomo llamado Fidias, estaba emparentado con el rey Hierón II, lo que le habría facilitado el acceso a elevados puestos, sin embargo, arrastrado por su afición a las ciencias, prefirió consagrarse al estudio de la matemática bajo la dirección de Euclides en Alejandría.

Ya de muy joven comenzó a destacar por sus trabajos técnicos entre los que destaca la desecación de los pantanos de Egipto, obra considerada irrealizable hasta entonces y que él consiguió realizar mediante el empleo de diques móviles. Ya en Siracusa, Arquímedes prosiguió sus estudios de geometría y mecánica logrando descubrir principios que han inmortalizado su nombre: *el* *principio de Arquímedes....*

Durante el asedio de Siracusa por el general romano Marcelo, Arquímedes, a pesar de no ostentar cargo oficial alguno se puso a disposición de Hierón, llevando a cabo prodigios en la defensa de su ciudad natal, pudiéndose afirmar que él sólo mantuvo la plaza contra el ejército romano. Entre la maquinaria de guerra cuya invención se le atribuye está la catapulta y un sistema de espejos y lentes que incendiaba los barcos enemigos al concentrar los rayos del Sol; según algunos historiadores, era suficiente ver asomar tras las murallas algún soldado con cualquier objeto que despidiera reflejos brillantes para que cundiera la alarma entre el ejército sitiador. Sin embargo, los confiados habitantes de Siracusa, teniéndose a buen recaudo bajo la protección de Arquímedes, descuidaron sus defensas, circunstancia que fue aprovechada por los romanos para asaltar la ciudad.

A pesar de las órdenes del cónsul Marcelo de respetar la vida del sabio, durante el asalto, un soldado que lo encontró abstraído en la resolución de algún problema, quizá creyendo que los brillantes instrumentos que portaba eran de oro o irritado porque no contestaba a sus preguntas, lo atravesó con su espada causándole la muerte.

Aunque probablemente su contribución a la ciencia más conocida sea el principio de la hidrostática que lleva su nombre, *Principio de Arquímedes: todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso de fluido desalojado* o por enunciar la *ley de la palanca*.

No fueron menos notables sus escritos acerca de la cuadratura del círculo, el descubrimiento de la relación aproximada entre la circunferencia y su diámetro, relación que se designa hoy día con la letra griega π[1]. Calculó π con un error en torno a una milésima.

Arquímedes fue autor de numerosas obras de variada temática en las que destaca el rigor de sus demostraciones geométricas[2], razón por la que es considerado el más notable científico y matemático del mundo griego. Aunque muchos de sus escritos se perdieron en la destrucción de la *Biblioteca de Alejandría*, han llegado hasta la actualidad a través de las traducciones árabes.

[1]Fue Leonhard Euler el primero en usar esta letra.

[2]En el texto dado más abajo Arquímedes se convence del resultado, pero no lo considera una verdadera demostración por su falta de rigor.

Aquí he trabajado con *El Método*, que es un libro de Arquímedes que se perdió hasta el año 1906, para volver a desaparecer en la Gran Guerra. Volvió a encontrarse y se subastó, fue comprado por una persona anónima y donado al Walters Art Museum de Baltimore.

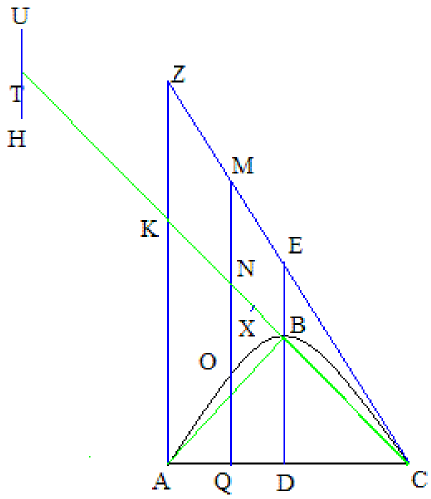
La importancia de este libro radica en que Arquímedes explica como llega a esos razonamientos tan avanzados para su época y como se convenció de que el resultado intuído era cierto.

Teorema 1 *El área del segmento de parábola ABC es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo asociado ABC.*

Vamos a adjuntar el texto original de Arquímedes, extraído de *El Método* [12], donde explica como se convence de cual es el valor del área de una sección de parábola.

Sea** ABC **un segmento comprendido entre la recta** AC **y la sección** ABC **de un cono rectángulo**[3]**; divídase** AC **por la mitad en** D **y trácese la recta** DBE **paralela al diámetro**[4]**, y uniendo** B **con** A **y** B **con** C**, trácense las rectas** BA **y** BC**.
Digo que el segmento** ABC **es cuatro tercios del triángulo** ABC**.

[3]Esto es un segmento de parábola.
[4]El eje de la parábola.



Trácense por los puntos A y C la recta AZ paralela a DBE y la CZ tangente a la sección[5]; prolónguese CB hasta K, y sea KT igual a CK. Considérese CT como una palanca[6], siendo K su punto medio, y sea MQ una recta paralela a ED.

Puesto que CBA es una parábola [7] y que CZ es tangente a ella, y CD es una ordenada[8] $EB = BD$, como se demuestra en los $Elementos$[9]. Por lo mismo y puesto que ZA y MQ son paralelas a ED, son iguales MN y NQ, así como ZK y KA[10]. Y puesto que la razón entre CA y AQ es igual que la razón entre MQ y QO lo cual se expone en un lema[11], y la razón entre CA y AQ es igual a la razón entre CK y KN[12], sucede que siendo también CT igual

[5] En C.

[6] A mi me resulta muy sorprendente que la mayoría de los razonamientos los haga con la ley de la palanca.

[7] Ahora en el oríginal aparece la palabra parábola, mientras que antes era 'sección de un cono rectángulo'.

[8] Esto quiere decir que CD es paralela a la tangente en el vértice de la parábola B.

[9] No se refiere a los *Elementos* de Euclides, si no a otros *Elementos* disponibles entonces y ahora posiblemente perdidos. Para convencerse basta con ver que para $y^2 = 2px$ tenemos como tangente en (x_0, y_0) a $yy_0 = p(x + x_0)$ y al hacer la intersección con el eje X nos queda $x = -x_0$.

[10] De la semejanza de los triángulos MNC y EBC y QNC y DBC.

[11] Proposición 5 de *Sobre la cuadratura de la parábola.*

[12] De la semejanza de los triángulos ACK y QCN.

que KT la razón entre TK y KN será igual a la razón entre MQ y QO. Ahora bien, puesto que le punto N es el centro de gravedad de MQ, por ser MN igual a NQ, si tomamos la recta UH igual a QO de manera que su centro de gravedad sea el punto T, de modo que sea UT sea igual a TH, la recta UTH estará en equilibrio con la recta MQ, que permanece en su sitio, por estar TN dividida[13] en partes que están en razón inversa a los pesos UH y MQ, siendo la razón entre TK y KN igual a la razón entre MQ y HU[14], y por lo tanto K es el centro de gravedad del conjunto de ambos pesos. Análogamente si en el triángulo ZAC se trazan tantas paralelas como se quiera a ED, éstas, permaneciendo en su lugar, estarán en equilibrio con los segmentos determinados sobre ellas por la sección y trasladados al punto T, de manera que el centro de gravedad de unas y otros será K.

Ahora bien,las rectas trazadas en el triángulo CZA componen el propio triángulo y los segmentos rectilíneos obtenidos en la sección del mismo modo que OQ componen el segmento ABC; por lo tanto el el triángulo ZAC permaneciendo en su lugar estará en equilibrio respecto al punto K, con el segmento de la sección trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto será K.

Divídase ahora CK por el punto X de manera que CK sea el triple de KX; por tanto el punto X será el centro de gravedad del triángulo ZAC, como está demostrado en Sobre el equilibrio. ***Y puesto que el triángulo ZAC, permaneciendo en su lugar está en equilibrio, respecto de K, con el segmento BAC, trasladado con centro de gravedad en T, y que X es el centro de gravedad del triángulo ZAC, se verifica, por consiguiente, que la razón del triángulo ZAC al segmento ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de TK a XK. Ahora bien, siendo TK el triple de KX, el triángulo ZAC será triple del segmento ABC. Además, el triángulo ZAC es cuádruple del triángulo ABC, ya que ZK es igual a KA y AD es igual a DC, luego el segmento ABC equivale a cuatro tercios del triángulo ABC.***

Sin embargo Arquímedes dice después que esto no es una demostración

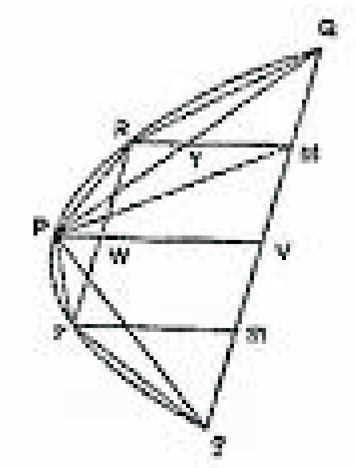
[13]Por el punto K.
[14]Por *El equilibrio de los planos.*

rigurosa, y que la demostración rigurosa la expone al final del escrito, pero esa parte no está completa, así que la demostración siguiente es de su libro *Sobre la Cuadratura de la Parábola*[15] [15].

Proposición 1 Si Qq es la base y p es el vértice de un segmento parabólico, y si R es el vértice del segmento acotado por la parábola y PQ entonces

$$\Delta PQq = 8\Delta PRQ$$

[16]



Dem: El diámetro que pase por R cortará a la cuerda PQ y a QV, sean estos puntos Y y M. Unimos PM.

Por la proposición 19[17] [10] se tiene que

$$PV = \frac{4}{3}RM$$

$$PV = 2YM$$

[15]Las cuatro últimas proposiciones (son 24).

[16]Aquí Δ se refiere al área.

[17]

Proposición 2 *Si Qq es una cuerda de una parábola que es bisectada en V por el diámetro PV, y si RM es un diámetro que corta a QV en M, y si RW es la ordenada (paralela a Qq) de R a PV entonces*

$$PV = \frac{4}{3}RM$$

$$YM = 2RY$$

entonces

$$\Delta PQM = 2\Delta PRQ$$

$$\Delta PQV = 4\Delta PRQ$$

y

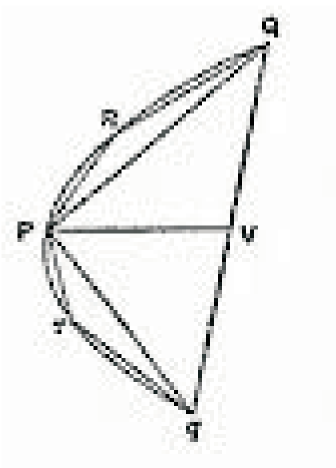
$$\Delta PQq = 8\Delta PQR$$

y la misma prueba vale para

$$\Delta PqQ = 8\Delta Prq$$

Proposición 3 ***Sea*** $A, B, C...$ ***una serie de áreas, cada una de ellas 4 veces la siguiente en orden, y la primera*** $A = \Delta PQq$ ***entonces tenemos que***

$$A + B + C + ... < area(segmento\ parabolico\ PQq)$$



Dem: Por la proposición anterior tenemos

$$\Delta PQq = 8\Delta Prq = 8\Delta Prq$$

entonces

$$\Delta PQq = 4(\Delta Prq + \Delta PQR)$$

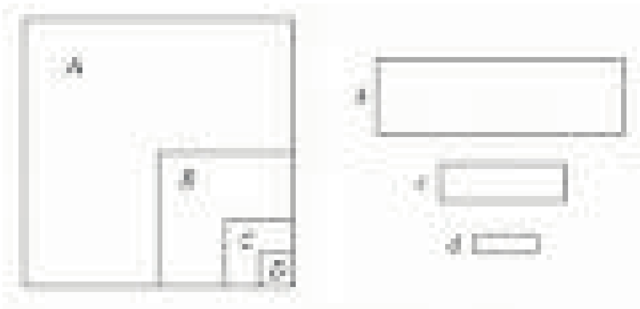
como $A = \Delta PQq$ ***se tiene*** $B = (\Delta Prq + \Delta PQR)$.

De igual manera hacemos para C**... con los segmentos restantes.**

Con lo que tenemos que esta suma es el área de un polígono inscrito, y por tanto menor que el área del segmento parabólico.

***Proposición 4** Dada una erie de áreas $A, B, C...Z$, con A la mayor y 4 veces la siguiente en orden entonces se tiene*

$$A + B + C + ... + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$$



Dem: Tomemos áreas

$$b = \frac{1}{3}B$$

$$c = \frac{1}{3}C$$

y así.

Tenemos entonces

$$b + B = \frac{1}{3}A$$

$$C + c = \frac{1}{3}B$$

Luego

$$B + C + D + ...Z + b + c + d + ... + z = \frac{1}{3}(A + B + C + ...Y)$$

pero

$$b + c + d + ...y = \frac{1}{3}(B + C + ...Y)$$

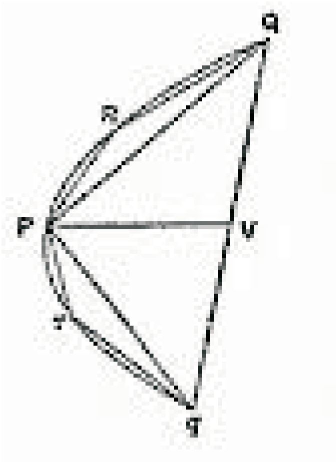
y por sustracción tenemos

$$B + C + D + ...Z + z = \frac{1}{3}A$$

o

$$A + B + C + ...Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$$

Proposición 5 Todo segmento acotado por una parábola y una cuerda Qq tiene como área cuatro tercios la del triángulo con base y altura la misma que tiene la parábola.



Dem: Sea

$$K = \frac{4}{3}\Delta PQq$$

queremos ver que K es el área del segmento parabólico. Pero si no fuese así sería mayor o menor.

Supongamos que el área del segmento parabólico es mayor que K:

Entonces si ponemos triángulos que tienen a PQ y Pq como base y vértices R y r y así con los demás segmentos parabólicos restantes, y conseguimos así segmentos parabólicos restantes con suma de áreas menor que el área por la que PQq y K se diferencian.

entonces, el polígono así formado tendría área mayor que K, lo que no puede ser por la proposición anterior

$$A + B + C + D... < \frac{4}{3}A$$

Supongamos ahora que el área del segmento es menor que K:

Si $\Delta PQq = A$, $B = \frac{1}{4}A$ y así hasta tener un área X menor que la diferencia entre K y el segmento parabólico. Tenemos por la proposición anterior que

$$A + B + C + ... + X + \frac{1}{3}X = \frac{4}{3}A = K$$

entonces como K excede a $A+B+C+...X$ por un área menor que X, y al área del segmento por un área mayor que X tenemos que

$$A + B + C + ... + X > area(segmento\ parabolico\ PQq)$$

lo que es una contradicción con una proposición anterior.

Entonces tenemos que el área del segmento no puede ser mayor ni menor que K, luego ha de ser K exactamente.

La reinterpretación algebraica moderna de esto es

$$1 + \frac{1}{4} + ...\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}$$

con lo que el área de la sección de parábola será la suma de la serie

$$a(PQq)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$$

Arquímedes no utiliza el paso al límite, pero lo utiliza intuitivamente en su método de exhaución. En este caso, Arquímedes calcula el resto de la serie

$$T + \frac{T}{4}... + \frac{T}{4^n}$$

donde

$$T = a(PQq)$$

este es

$$\frac{1}{3}\frac{T}{4^n}$$

para ver esto basta sumar la serie a partir del término $n+1$

$$\frac{1}{4^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}\frac{1}{4^{n+1}}$$

después procede por doble reducción al absurdo para ver que la suma no puede ser ni mayor ni menor que $\frac{4}{3}T$ y dice que el resto se puede hacer tan *pequeño como se quiera*, si se utilizase el concepto de límite habría que decir que en el límite no hay resto. Por eso la exhaución de Arquímedes es parecida al uso del paso al límite, pero no es idéntica, pues no trata de la misma manera el infinito.

Es necesario señalar que 2000 años antes del descubrimiento del cálculo se usaban métodos muy parecidos a los propios de él, como puede ser sumar una serie geométrica.

Capítulo 2

El Problema de Apolonio

Uno de los mayores geómetras de la historia es Apolonio de Perga, así que parece necesario tratar aquí algo de su obra y su biografía.

Apolonio de Perga (Perga, 262 a.c, Alejandría 190 a.c) era conocido como 'el gran geómetra'. Sus trabajos tuvieron una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, en particular su famoso libro *Las cónicas* introdujo términos como parábola, elipse e hipérbola.

Apolonio nació en Perga, Turquía. En esa poca, Pérgamo era conocido como centro cultural. De joven Apolonio fue a Alejandría donde estudió con los seguidores de Euclides y donde más tarde él mismo daría clases. Apolonio visitó Pérgamo lugar en el que existía una universidad y una biblioteca similares a las de Alejandría. Esto es casi todo lo que sabemos de su vida.

Sabemos bastante más sobre los libros que escribió Apolonio.

Las cónicas estaba dividido en ocho volúmenes pero tan sólo los cuatro primeros han perdurado en el griego original. En árabe, sin embargo, podemos encontrar los siete primeros.
Debemos remarcar en primer lugar que para Apolonio las secciones cónicas

son por definición las curvas formadas por un plano que intersecta la superficie de un cono. Apolonio explica en su prefacio cómo llegó a escribir su famoso trabajo *Las cónicas.*

... comencé investigando esta materia a petición de Náucrato el geómetra en la época en la que vino a Alejandría y permaneció conmigo, y, cuando terminé los ocho libros se los entregué en el momento, muy deprisa, porque estaba marchándose por mar; no habían sido revisados, de hecho los escribí de un tirón, posponiendo su revisión hasta el final.

Los libros I y II de *Las cónicas* comenzaron a circular sin ninguna revisión, de hecho hay evidencias de que ciertas traducciones que han llegado a nosotros proceden de esos primeros manuscritos.

De los volúmenes uno al cuatro forman una introducción elemental a las propiedades básicas de los conos. La mayor parte de los resultados de estos libros eran conocidos por Euclides... pero algunos son, en palabras del propio Apolonio:

... más trabajados y generalistas que en los escritos de otros.

En el libro uno se estudian las relaciones entre los diámetros y tangentes de los conos, mientras que en el libro dos, Apolonio investiga como se relacionan las hipérbolas con las asíntotas, y estudia además como dibujar tangentes para conseguir conos. Hay, sin embargo, nuevos resultados en estos libros, en particular en el tercero.

En los libros cuatro y cinco Apolonio discute las normales a las cónicas. Da proposiciones determinando el centro de curvatura, lo que conduce a la ecuación cartesiana de la evoluta[1]

Pappo proporciona algunas indicaciones del contenido de los restantes libros de Apolonio, *Corte de una razón*, *Corte de un área*, *Determinación de una sección* y *Construcciones. Corte de una razón* sobrevive en árabe y el bibliógrafo del siglo X Ibn al-Nadim nos dice que otros tres trabajos fueron traducidos al árabe aunque ninguno de ellos ha llegado a nuestros das.

De otras fuentes surgen referencias a más trabajos de Apolonio, ninguno

[1]El lugar geométrico de los centros de curvatura.

de los cuales ha perdurado. Hípsiclo hace referencia a un trabajo de Apolonio en el que compara un dodecaedro y un icosaedro inscritos en la misma esfera. Apolonio también escribió sobre las hélices cilíndricas y otro sobre los números irracionales, así lo menciona Proclo. Eutocio hace referencia a un libro de Apolonio en el que obtiene una aproximación para π mejor que la de Arquímedes. En *El espejo ardiente*, Apolonio demostró que los rayos paralelos de luz no se concentran en un foco por un espejo esférico (como se creía con anterioridad) y discutió las propiedades focales de un espejo parabólico.

Apolonio también fue un importante fundador de la astronomía matemática griega, que utilizaba modelos geométricos para explicar la teoría planetaria.

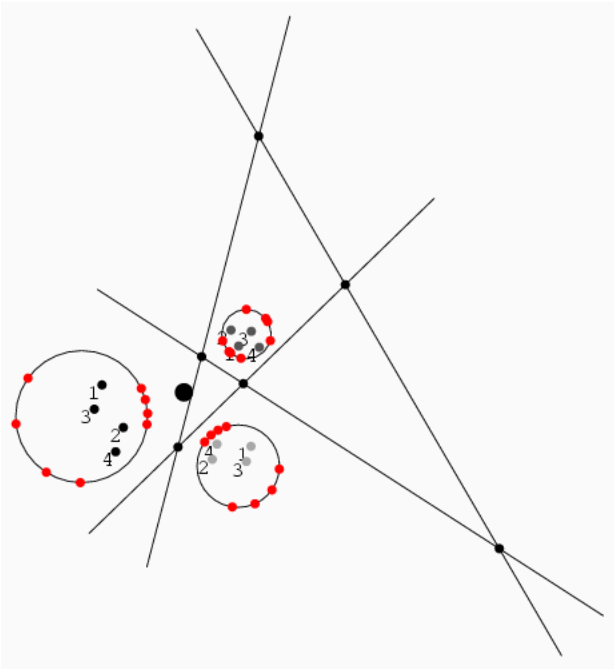
El problema de Apolonio es *construir un círculo tangente a tres círculos dados*, pero también se admiten casos degenerados, como puede ser si tenemos rectas o puntos en lugar de círculos. En este problema han trabajado grandes figuras de la matemática a lo largo de la historia: Euclides en su libro IV de los *Elementos* demuestra cómo construir un círculo que pase por tres puntos dados y cómo construir un círculo tangente a tres rectas dadas, estos son los casos más fáciles, más tarde Apolonio generaliza el resultado para cualquier combinación de puntos, rectas o círculos[2], pero el libro que recogía esta demostración, *De Tectonibus*[3] se perdió y no ha llegado hasta nosotros mas que una descripción de su contenido.

Francois Viète, también llamado Vieta, posiblemente el mejor matemático del siglo XVI, solucionó el problema para tres cículos, tratando cada uno de los casos de forma individual y reduciéndolo al anterior. Gauss, Gergonne y Petersen lo demuestran de otra manera, proceden demostrando el caso general en *Complete works, vol IV*, *Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère, Annales de mathématiques pures et appliqués 4, 1813-1814* y *Methoden und Theorien* respectivamente.

Probablemente la demostración más elegante sea debida a Gergonne: en ella localiza los seis centros homotéticos (tres internos y tres externos) de los tres círculos dados, [3], estos están tres a tres en cuatro rectas.
Después halla los polos de inversión de uno de éstos con respecto a cada uno de los tres círculos y conecta los polos de inversión con el centro radical de los círculos, [3],después los tres pares de intersecciones son los puntos de tangencia de dos de los ocho círculos de Apolonio, para ver qué dos tomar

[2]Excepto el caso de tres círculos.
[3]*Tangencias* es la traducción.

simplemente los dos que intersecan a los tres círculos originales en un solo punto de la tangencia. Este procedimiento, si se repite, da los otros tres pares de círculos.



Sin embargo esta demostración no es la más elemental.
Por los métodos algebraicos directos se tiene si (x_i, y_i) son los centros de los círculos dados con radio r_i

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0 \tag{2.1}$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0 \tag{2.2}$$
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0 \tag{2.3}$$

Operamos y obtenemos

$$(x^2 + y^2 - r^2) - 2xx_i - 2yy_i \mp 2rr_i + (x_i^2 + y_i^2 - r_i^2) \quad i = 1, 2, 3$$

y si ahora sustituímos $i = 2$ y le restamos el caso $i = 1$ y al caso $i = 3$ le restamos el caso $i = 1$ obtenemos un sistema lineal

$$ax + by + cr = d$$
$$a'x + b'y + c'r = d'$$

donde

$a = 2(x_1 - x_2),\ b = 2(y_1 - y_2),\ c = \pm 2(r_1 - r_2),\ d = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2)$

$a' = 2(x_1 - x_3),\ b' = 2(y_1 - y_3),\ c' = \pm 2(r_1 - r_3),\ d = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_3^2 + y_3^2 - r_3^2)$

Resolviendo en función de r obtenemos

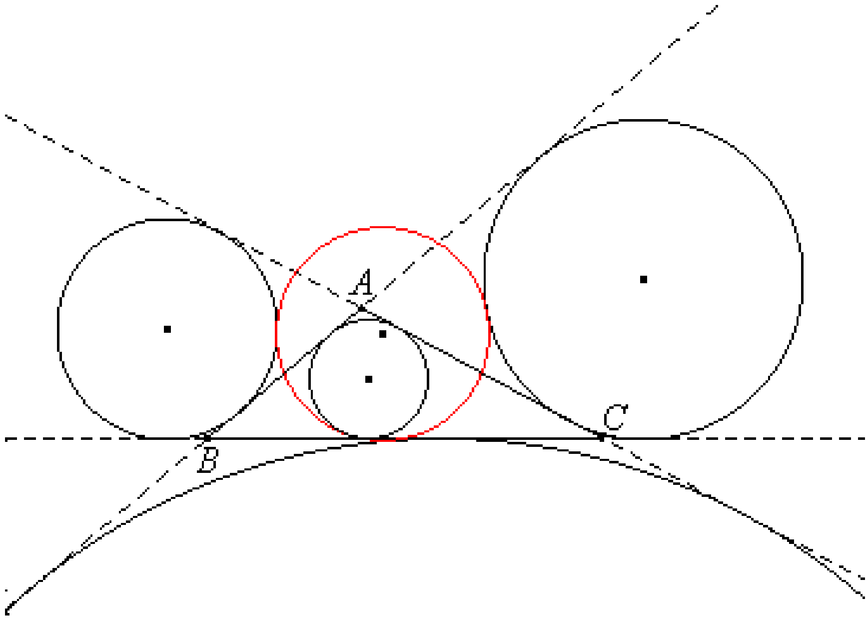
$$x = \frac{b'd - bd' - b'cr + bc'r}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{-a'd + ad' + a'cr - ac'r}{ab' - a'b}$$

estos valores los sustituímos en (1) y resolvemos la ecuación resultante, con lo que conocemos el radio y el centro de los círculos buscados.

Antes de acabar quiero señalar que el *Círculo de Euler* o de *los Nueve Puntos* resuelve este problema.

El Círculo de Euler se define como el que contiene a los pies de las medianas, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices[4], entonces tenemos la siguiene situación



Y que este problema es resoluble con regla y compás como únicas herramientas.

[4]Se demuestra que existe para todo triángulo en [1], así como que el centro de este círculo es un punto de la recta de Euler.

Capítulo 3

La Fórmula de Herón del Área del Triángulo

Herón de Alejandría fue un ingeniero griego, trabajó en Alejandría, posiblemente en el siglo primero.

Aun después de la decadencia del Imperio Alejandrino y de la ciencia griega todavía existieron algunos grandes personajes de ciencia. Uno de estos genios fue Herón, que desplegó una actitud casi moderna para la mecánica, descubriendo de forma arcaica la ley de acción y reacción, mediante experimentos con vapor de agua.

Describió un gran número de máquinas sencillas y generalizó el principio de la palanca de Arquímedes, inventó una esfera hueca a la que se adaptaban dos tubos curvos. Cuando hervía el agua en el interior de la esfera, ésta giraba a gran velocidad como resultado de la ley de acción y reacción.

En matemáticas pasó a la historia sobre todo por la fórmula que lleva su nombre y que permite calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados, aparecida por primera vez en su obra *La Métrica*. En esta obra también encontramos ejemplos numéricos[1] de medida de longitudes, áreas y volúmenes, así como alguna demostración.

La fórmula de Herón es una fórmula del área del triángulo en función de las longitudes de los lados del triángulo. Posiblemente ya fuese conocida por Arquímedes si bien la primera demostración que nos ha llegado es de Herón, en su libro *La Métrica*.

$$A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{3.1}$$

donde a, b y c son los lados y p es el semiperímetro, esto es

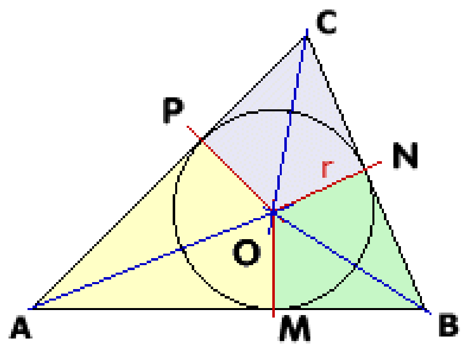
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Teorema 2 *Sea el triángulo ABC con lados a, b, c y semiperímetro p entonces su área es $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.*

Dem: Herón comienza inscribiendo un círculo en el triángulo dado, viendo que

$$A_t = rp$$

después observa que triángulos son semejantes (se marcan de colores iguales en la figura).



ahora prolonga la base AB hasta C' de manera que $AC' = CP$ Se tiene ahora que

$$BC' = p = \frac{a+b+c}{2}$$

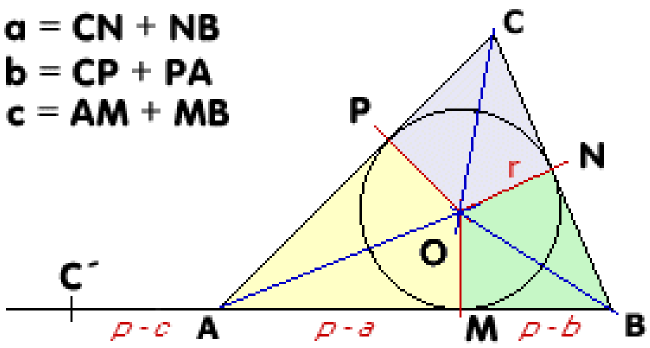
[1]Me parece interesante así que voy a añadir como calcula Herón $\sqrt[3]{100}$.
Calcula los cubos mas cercanos, que son 64 y 125, luego el numero buscado esta comprendido entre las de estas cantidades, hace $125 - 100 = 25 = 5^2$ y $100 - 64 = 36$ ahora hace $36 * 5 = 180$, se lo aade a 100. Divide 180 entre $100 + 180$ obteniendo $\frac{9}{14}$ y esto se lo suma a la raíz cúbica de 64, aproximando $\sqrt[3]{100} = 4 + \frac{9}{14}$ y esta aproximación tiene un error menor a 0.02.

pues

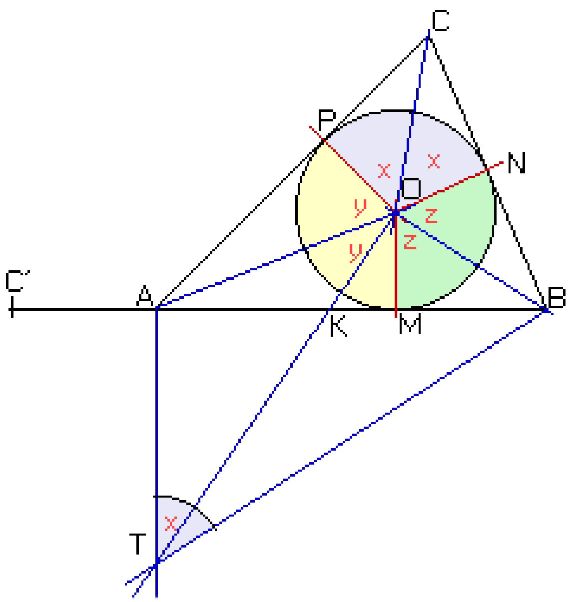
$$BC' = BM + MA + AC' = BM + MA + CP = \frac{2BM + 2MA + 2CP}{2}$$
$$\frac{(BM + AM) + (BN + NC) + (AP + PC)}{2}$$

así mismo tenemos que

$$p - c = (C'A + AM + MB) - (AM + MB) = C'A$$
$$p - b = (C'A + AM + MB) - (CP + PA) = (C'A + AM + MB) - (C'A + AM) = MB$$
$$p - a = (C'A + AM + MB) - (CN + NB) = (C'A + AM + MB) - (C'A + MB) = AM$$



Ahora Herón traza una perpendicular a la base por el punto A, y otra a OB por O, se cortan en T, y une este punto con B, Obteniendo el cuadrilatero $TAOB$



Se da cuenta de que este cuadrilatero se puede inscribir en un círculo, pues $TA \perp BA$ y $TO \perp BO$ y entonces por *Euclides III.22* tenemos que la suma de los ángulos opuestos es igual a dos rectos, por lo que, según la notación de la figura,

$$2x + 2y + 2z = \pi$$

$$y + z + \angle ATB = \frac{\pi}{2}$$

entonces

$$\angle ATB = x$$

Esto nos da la semejanza de los triángulos POC y ATB y tenemos

$$\frac{AB}{AT} = \frac{PC}{r} \Rightarrow \frac{AB}{AC'} = \frac{AT}{r}$$

También son semejantes los triángulos KAT y KMO, por lo que tenemos

$$\frac{AT}{AK} = \frac{OM}{KM} = \frac{r}{KM} \Rightarrow \frac{AT}{r} = \frac{AK}{KM}$$

entonces juntando las dos afirmaciones anteriores tenemos

$$\frac{AK}{KM} = \frac{AB}{AC'}$$

sumando uno a cada miembro nos queda

$$\frac{C'B}{AC'} = \frac{AM}{KM} \Leftrightarrow \frac{C'B * C'B}{AC' * C'B} = \frac{AM * MB}{KM * MB}$$

Si se observa ahora el triángulo BOK se tiene por el teorema de la altura[2] que

$$r^2 = KM * MB$$

sutituyendo

$$C'B^2 * r^2 = AC' * C'B * AM * MB$$

$$(C'B * r)^2 = A_t = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

y con esto acaba Herón su demostración.

[2]Para todo triángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional de los segmentos que determina sobre la misma.

En 1747 Euler publicó un artículo con el título *Variae demonstrationes geometricae*, donde daba una demostración sintética[3] de la fórmula de Herón.

Vamos a dar ahora la demostración de Leonhard Euler, que si bien no basa su legado en la geometría si que hizo grandes aportaciones a este campo, pero antes una pequeña biografía:

Leonhard Euler (1707, Basilea, Suiza-1783, San Petersburgo, Rusia) vivió en Rusia la mayor parte de su vida. Probablemente fue uno de los más grandes matemáticos de la historia, comparable a Gauss, Newton o Arquímedes.

Fue discípulo de Jean Bernoulli, pero superó rápidamente el notable talento matemático de su maestro. Su carrera profesional se circunscribió a las Academias de Ciencias de Berlín y San Petersburgo, la mayor parte de su trabajo se publicó en los anales de ciencias de estas instituciones. Fue protegido de Federico el Grande.

Perdió la vista de un ojo durante un experimento en óptica, y en 1766 la vista del otro, ya de mayor. Pasó los ltimos aos de su vida ciego, pero siguió publicando trabajos.

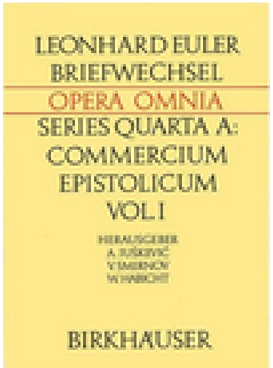
Posiblemente es el matemático con más trabajos publicados de la historia. La mayor parte de ellos se los dictó a su hijo mayor cuando ya estaba ciego. A pesar de que su actividad de publicación era incesante, un promedio de 800 páginas de artículos al año en su época de mayor producción, entre 1727 y 1783, la mayor parte de su obra completa está sin publicar. La labor de recopilación y publicación completa de sus trabajos, las *Opera Omnia*, comenzó en 1911 y no ha acabado aun. El proyecto inicial planeaba el trabajo sobre 887 ttulos en 72 volmenes. Se le considera el ser humano con mayor número de trabajos y artículos en cualquier campo del saber, solo equiparable a Gauss.

---

[3] Este es el estilo griego, sin ejes de coordenadas...

Las *Opera Omnia* están divididas en cuatro series, cada una con varios volumenes. La matemática está en 29 volúmenes en la serie I, la mecánica y la ingeniería ocuparán,cuando se completen, los 31 volúmenes de la serie II, la física ocupará la seie III y serán 12 volúmenes, mientras que la serie IV serán 8 volúmenes de la correspondencia de Euler.

Se decidió al comienzo de la edición que se haría en el idioma original del artículo, con lo que la mayoría de las páginas están en francés y latín.



Dem: Euler comienza inscribiendo una circunferencia en el triángulo, sea I el incentro[4], y r el radio.

Ahora Euler prolonga la bisectriz de $\angle ABC$ y traza una recta perpendicular a ella que pase por A. Sea V el punto de intersección de las rectas anteriores. Sea N el punto de intersección de las prolongaciones de AV y IS. Ya no hacen falta más construcciones.

Tenemos que

$$\angle AIV = \angle IAB + \angle IBA$$

por ser exterior al triángulo IAB, además también sabemos que $\angle AIV$ y $\angle IAV$ son complementarios

$$\angle AIV + \angle IAV = \frac{\pi}{2}$$

Si llamamos α, β y γ a los ángulos del triángulo ABC tenemos que

$$\angle AIV = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

[4]Sabemos que es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo.

y sabemos que

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

entonces con esto podemos afirmar que

$$\angle IAV=\frac{\gamma}{2}$$

Tenemos ahora la semejanza de los triángulos CUI y AIV y por lo tanto las proporciones

$$\frac{\bar{AV}}{\bar{IV}}=\frac{\bar{CU}}{\bar{IU}}=\frac{z}{r}$$

Tenemos que los triángulos NAS, NIV y BAV son semejantes, luego

$$\frac{\bar{AV}}{\bar{AB}}=\frac{\bar{IV}}{\bar{IN}}$$

$$\frac{\bar{AV}}{\bar{IV}}=\frac{\bar{AB}}{\bar{IN}}$$

y con la primera y la última proporciones tenemos

$$\frac{z}{r}=\frac{x+y}{\bar{SN}-r}\Leftarrow z\bar{SN}=r(x+y+z)=rs$$

Como $\angle BIS$ y $\angle VIN$ son opuestos por el vértice, son iguales, entonces

$$\angle IBS=\frac{\pi}{2}-\angle BIS=\frac{\pi}{2}-\angle VIN=\angle ANS$$

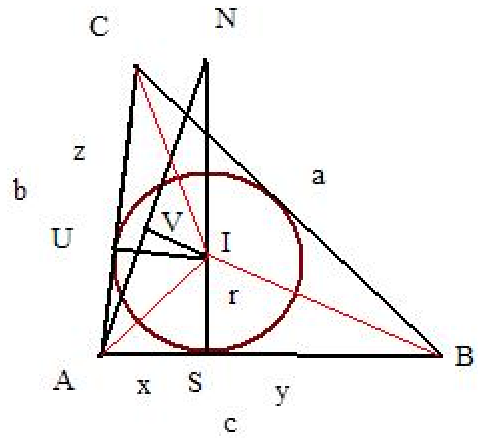
entonces los triángulos NAS y BIS son semejantes lo que nos da

$$\frac{\bar{SN}}{\bar{AS}}=\frac{\bar{BS}}{\bar{IS}}\Leftrightarrow \bar{SN}=\frac{xy}{r}$$

y ahora tenemos que

$$A_t=rs=\sqrt{rs(rs)}=\sqrt{rsz\bar{SN}}=\sqrt{sxyz}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

y con esto concluye la prueba de la fórmula de Herón dada por Euler.



Se ve que la demostración de Euler es menos farragosa y más astuta en cuanto a que tiene una cantidad menor de construcciones geométricas.

Capítulo 4

La Recta de Euler

En 1767 Euler publica un artículo, *'Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum'*, en la revista *'Novi comentarii Academiae Petropolitanae'* donde vuelve a trabajar con triángulos, en este artículo demuestra que en todos los triángulos el circuncentro[1], el baricentro[2] y el ortocentro[3] estan situados en una recta, *la recta de Euler* y espaciados de manera que el baricentro está dos veces mas lejos del ortocentro que del circuncentro.

La demostración en este caso es algebraica y muy directa, calcula las coordenadas de los puntos notables y observa que están alineados.

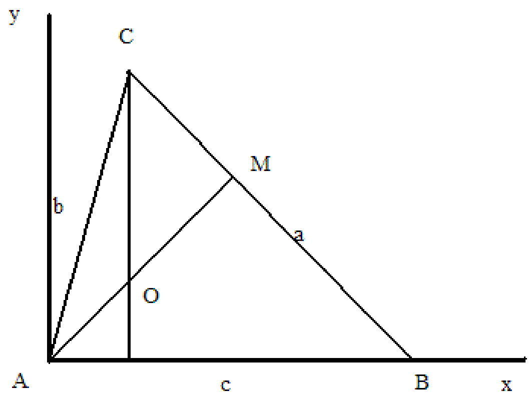
Teorema 3 *Sea ABC un triángulo, entonces el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados. Además el baricentro está dos veces más lejos del ortocentro que del circuncentro.*

Dem: Comienza utilizando la fórmula de Herón

$$A_t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Rightarrow 16A_t^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \tag{4.1}$$

Vayamos ahora con las coordenadas del ortocentro:

[1]El punto donde se cortan las mediatrices de los lados.
[2]El punto donde se cortan las medianas.
[3]El punto donde se cortan las alturas.



Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\frac{\bar{AB}}{b}$$

$$a^2 = b`2 + c^2 - 2c\bar{AP} \Rightarrow \bar{AP} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

y de la misma manera

$$\bar{BM} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

tenemos también

$$A_t = \frac{\bar{AM} * \bar{BC}}{2}$$

y la semejanza de los triángulos APO y AMB con lo que

$$\frac{\bar{BM}}{\bar{AM}} = \frac{\bar{OP}}{\bar{AP}}$$

y entonces

$$\bar{OP} = \frac{2a^2b^2 - a^4 - b^4 + c^4}{8cA_t}$$

y utilizando la fórmula (2)

$$\bar{OP} = \frac{2A_t}{c} + \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{4A_t}$$

Entonces el ortocentro tiene como coordenadas

$$(\bar{AP}, \bar{OP}) = (\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \frac{2A_t}{c} + \frac{c(c^2-a^2-b^2)}{4A_t})$$

Vamos ahora con el baricentro:

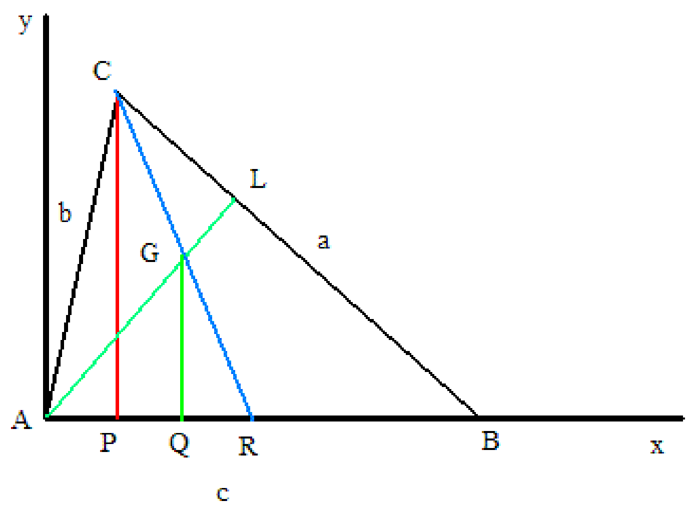
Sea R el punto medio de AB y L el punto medio de BC.

Tenemos que

$$A_t = \frac{1}{2}\bar{AB}\bar{CP} \Rightarrow \bar{CP} = \frac{2A_t}{c}$$

Trazamos la recta $QG \perp AB$ y tenemos que el triángulo RQG es semejante a RPC por lo que

$$\frac{\bar{RQ}}{\bar{RP}} = \frac{\bar{RG}}{\bar{RC}} = \frac{1}{3}$$



tenemos entonces

$$\bar{AQ} = \bar{AR} - \bar{RQ} = \frac{1}{2}\bar{AB} - \frac{1}{3}\bar{RP} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}(\bar{AR} - \bar{AP}) = \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c}$$

esta es la abscisa.

Volvemos a los triángulos semejantes anteriores que nos dan

$$\frac{\bar{GQ}}{\bar{CP}} = \frac{\bar{RG}}{\bar{RC}} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{GQ} = \frac{2A_t}{3c}$$

y las coordenadas son

$$(\bar{AQ}, \bar{GQ}) = (\frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c}, \frac{2A_t}{3c})$$

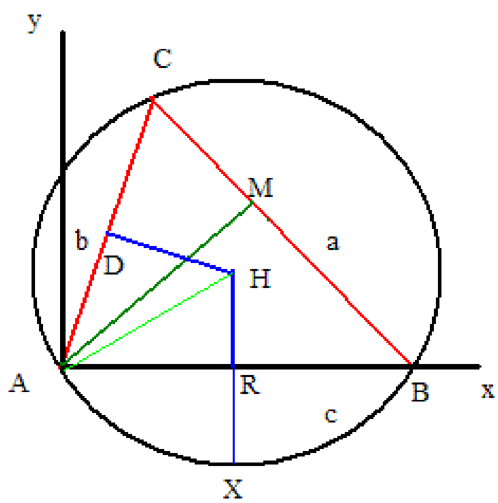
Nos falta el circuncentro:

Sea R el punto medio de AB y D el punto medio de AC, trazamos las mediatrices, que se cortan en el circuncentro H. Trazamos la altura AM con longitud $\bar{AM} = \frac{2A_t}{a}$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC obtenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma) = a^2 + b^2 - 2a\bar{CM}$$

$$\bar{CM} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$



Trazamos la circunferencia circunscrita, y observamos que la medida de $\angle ACB$ es el arco AX, pero $\angle AHR = \angle ACB$. Esto nos da la semejanza de los triángulos ACM y AHR y la proporción

$$\frac{\bar{HR}}{\bar{AR}} = \frac{\bar{CM}}{\bar{AM}} \Rightarrow \bar{HR} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8A_t}$$

y entonces tenemos que las coordenadas de H son

$$(\bar{AR}, \bar{RH}) = (\frac{c}{2}, \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8A_t})$$

Ahora tenemos que ver las longitudes $\bar{OG}, \bar{OH}$ y $\bar{GH}$, pero Euler, para evitar trabajar con raíces lo que hace es trabajar con el cuadrado de las distancias anteriores.

$$\bar{OG}^2 = \frac{(b^2-a^2)^2+16A_t^2}{9c^2} - \frac{2aa^2+2b^2+c^2}{3} + \frac{a^2b^2c^2}{4A_t^2}$$

$$\bar{OH}^2 = \frac{(b^2-a^2)^2+16A_t^2}{4c^2} - \frac{6a^2+6b^2+3c^2}{4} + \frac{9a^2b^2c^2}{16A_t^2}$$

$$\bar{GH}^2 = \frac{(b^2-a^2)^2+16A_t^2}{36c^2} - \frac{2a^2+2b^2+c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16A_t^2}$$

Sea $d = \bar{GH}$ entonces

$$\bar{OG}^2 = 4(\frac{(b^2-a^2)^2+16A_t^2}{36c^2} - \frac{2aa^2+2b^2+c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16A_t^2}) = 4\bar{GH}^2$$

$$\bar{OG} = 2\bar{GH} = 2d$$

esto es que la distancia del baricentro al ortocentro es doble que la distancia al circuncentro.

Pero

$$\bar{OH}^2 = 9(\frac{(b^2-a^2)^2+16A_t^2}{36c^2} - \frac{2a^2+2b^2+c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16A_t^2}) = 9\bar{GH}^2 = 3d$$

y tenemos que están alineados por

$$\bar{OH} = 3d = 2d + d = \bar{OG} + \bar{GH}$$

y si no estuvieran alineados debería ser estrictamente menor.

Vamos a dar ahora otra demostración posterior a la de Euler que, sin embargo, es totalmente sintética:

Dem: Sea el triángulo ABC, con M el punto medio del lado AB, y G un punto de la mediana[4] de manera que

$$GC = 2GM$$

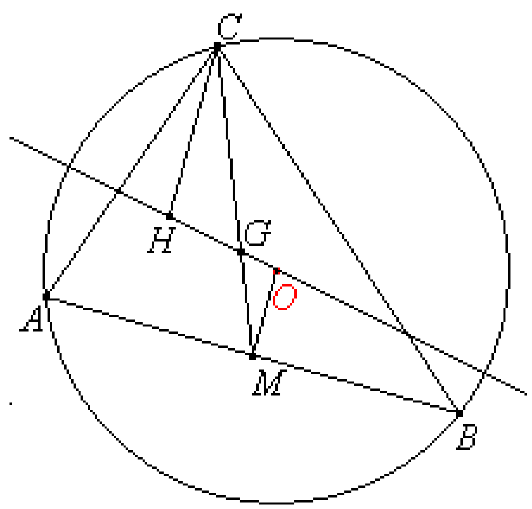
y sea O el centro del círculo que circunscribe al triángulo, que está en la intersección de las mediatrices.

Extendemos OG por GO de manera que

$$GH = 2GO$$

y unimos H a C.

Por estas relaciones tenemos que los triángulos MOG y CHG son similares, por lo tanto la recta que une H con un vértice del triángulo es perpendicular al lado del triángulo opuesto a ese vértice[5], esto es que las alturas pasen por H.



[4]La recta que pasa por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto.

[5]Sabemos que el punto O y G son los mismos si en lugar de tomar M en AB tomamos M' en otro lado, luego la construcción es idéntica.

Bibliografía

[1] H.Dorrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Ed. Dover, 1965.

[2] Wikipedia, *www.wikipedia.org.*

[3] Mathworld, *mathworld.wolfram.com.*

[4] Divulgamat, *www.divulgamat.net.*

[5] MacTutor, *www-history.mcs.st-and.ac.uk*

[6] W.Dunham, *Euler, el maestro de todos los matemáticos*, Ed. Nivola, 2000.

[7] W.Dunham, *Viaje a través de los genios*, Ed. Pirámide, 1992.

[8] JSTOR, *www.jstor.org*

[9] Cut the knot, *www.cut-the-knot.org*

[10] Imágenes de la edición de T.L.Heath de los originales de Arquímedes, *www.math.ubc.ca/ cass/archimedes/parabola.html*

[11] Arquímedes, *Archimedis Opera Omnia* Editor J.L. Heiberg, 1993.

[12] Arquímedes, *El Método*, Ed. Universitat Politécnica de Catalunya, 1993.

[13] Gallica, *http://gallica.bnf.fr/*

[14] Gallica Math, *math-doc.ujf-grenoble.fr/GALLICA*